2022 年湖北省七市(州)高三年级 3 月联合统一调研测试
数学参考答案及评分标准

一、单选题

1. D　2. A　3. B　4. D　5. B　6. B　7. C　8. A

二、多项选择

9. AD　10. ACD　11. AC　12. BCD

三、填空题

13. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　14. 2　15. 1

16. $[-5,4)$　$(\sqrt{5}+1,2\sqrt{2}+1)\cup(6,7)$

四、解答题

17. 解答:(1)当 $n=1$ 时,$a_1=3S_1-2=3a_1-2$,所以 $a_1=1$;………………………… 1 分

当 $n\geqslant 2$ 时,因为 $a_n=3S_n-2$,所以 $a_{n-1}=3S_{n-1}-2$,所以 $a_n-a_{n-1}=3a_n$,

即 $a_n=-\frac{1}{2}a_{n-1}$. ……………………………………………………………… 3 分

所以数列 $\{a_n\}$ 是等比数列,其通项公式为 $a_n=(-\frac{1}{2})^{n-1}$. ……………………… 5 分

(2)证明:对任意的 $m\in\mathbf{N}^*$,$2S_{m+2}=2\times\frac{1-(-\frac{1}{2})^{m+2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{4}{3}[1-(-\frac{1}{2})^{m+2}]$,………

…………………………………………………………………………………… 7 分

$S_m+S_{m+1}=\frac{1-(-\frac{1}{2})^m}{1+\frac{1}{2}}+\frac{1-(-\frac{1}{2})^{m+1}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}[2-(-\frac{1}{2})^m-(-\frac{1}{2})^{m+1}]$

$=\frac{4}{3}[1-(-\frac{1}{2})^{m+2}]$. ……………………………………………………… 9 分

所以 $2S_{m+2}=S_m+S_{m+1}$,即 S_m,S_{m+2},S_{m+1} 成等差数列. ……………………… 10 分

18. 解答:(1)由余弦定理可得:$a\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}-b-\frac{1}{2}c=0$,

即 $b^2+c^2-a^2=-bc$. ……………………………………………………………… 3 分

所以 $\cos A=-\frac{bc}{2bc}=-\frac{1}{2}$,又 $A\in(0,\pi)$,所以 $A=\frac{2\pi}{3}$. ……………………………

…………………………………………………… 6 分(没有 $A\in(0,\pi)$,扣 1 分)

(2)由题意 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2$,则 $c=2\sin C$,$b=2\sin B$, ………………… 8 分

则 $b+2c=2\sin B+4\sin(\frac{\pi}{3}-B)=2\sqrt{3}\cos B$,……………………………… 10 分

由 $A=\frac{2}{3}\pi$ 得 $B\in(0,\frac{\pi}{3})$，…………………………………………………………………… 11 分

则 $b+2c\in(\sqrt{3},2\sqrt{3})$. ……………………………………………………………………… 12 分

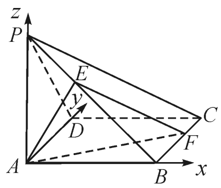
19. 解答：(1)证明：由 $PA\perp$ 底面 $ABCD$，可得 $PA\perp BC$. 又在正方形 $ABCD$ 中，$BC\perp AB$，

且 $PA\cap AB=A$，则 $BC\perp$ 平面 PAB，有 $BC\perp AE$. ……………………………………… 2 分

由 $PA=AB$，E 为 PB 中点，可得 $AE\perp PB$.

又 $PB\cap BC=B$，则 $AE\perp$ 平面 PBC，从而平面 $AEF\perp$ 平面 PBC. …………… 4 分

(2) 以 A 为坐标原点，AB，AD，AP 分别为 x，y，z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系. 设 $AB=1$，则 $A(0,0,0)$，$B(1,0,0)$，$C(1,1,0)$，$D(0,1,0)$，$P(0,0,1)$. …… 5 分



由(1)可知 $\vec{n_1}=\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$ 为平面 PBC 的法向量. ……………………………… 6 分

由 $BE=\sqrt{2}BF$，可知 $EF\parallel PC$. 设 $\overrightarrow{BF}=\lambda\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{BP}$，则 $\overrightarrow{BF}=\lambda(0,1,0)$，$\overrightarrow{BE}=\lambda(-1,0,1)$，可得 $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=(1,\lambda,0)$，$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=(1-\lambda,0,\lambda)$. …… 7 分

设平面 AEF 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x,y,z)$，由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{AF}=0\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{AE}\end{cases}$，即 $\begin{cases}x+\lambda y=0\\ (1-\lambda)x+\lambda z=0\end{cases}$， ……

…………………………………………………………………………………………… 8 分

取 $y=1$，则 $x=-\lambda$，$z=1-\lambda$，即 $\boldsymbol{n}_2=(-\lambda,1,1-\lambda)$. ……………………………… 9 分

从而，由 $|\cos<\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2>|\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{|1-2\lambda|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2\lambda^2-2\lambda+2}}=\frac{\sqrt{7}}{14}$，………………… 10 分

解得 $\lambda=\frac{1}{3}$ 或 $\lambda=\frac{2}{3}$，即 F 为 BC 三等分点处. ……………………………… 12 分

20. 解答：(1)由题意 X 的取值可能为 $-1,0,1$.

则 $P(X=-1)=\left(1-\frac{4}{5}\right)\times\frac{2}{3}=\frac{2}{15}$，……………………………………………… 1 分

$P(X=0)=\left(1-\frac{4}{5}\right)\times\left(1-\frac{2}{3}\right)+\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{3}{5}$，…………………………………… 2 分

$P(X=1)=\frac{4}{5}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{15}$. ……………………………………………………… 3 分

那么 X 的分布列为：

X	-1	0	1
P	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{15}$

…………………………………………………………………………………… 4 分

$E(X)=-1\times\frac{2}{15}+0\times\frac{3}{5}+1\times\frac{4}{15}=\frac{2}{15}$. ………………………………………… 6 分

(2)第 3 轮比赛后，甲单位累计得分低于乙单位的 3 轮计分有四种情况(不按先后顺序)：$-1,-1,-1$；$-1,-1,0$；$-1,-1,+1$；$-1,0,0$. ………………………… 8 分

所以 $p_3=\left(\frac{2}{15}\right)^3+C_3^2\left(\frac{2}{15}\right)^2\times\frac{3}{5}+C_3^2\left(\frac{2}{15}\right)^2\times\frac{4}{15}+C_3^2\left(\frac{3}{5}\right)^2\times\frac{2}{15}=\frac{26}{135}$. ……… 12 分

21. 解答：(1)由题意可得 $c=1,b=1$ 从而 $a^2=2$.

所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$. …………………………………………………… 3 分

(2)证明：由题意可设直线 l：$y=kx+\frac{1}{2}$，设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

将直线 l 代入椭圆方程得 $(4k^2+2)x^2+4kx-3=0$，………………………………………… 4 分

所以 $x_1+x_2=\frac{-4k}{4k^2+2}$，$x_1x_2=\frac{-3}{4k^2+2}$. ……………………………………………… 5 分

直线 AP 的方程为 $y=\frac{y_1-1}{x_1}x+1$，直线 AQ 的方程为 $y=\frac{y_2-1}{x_2}x+1$. ………… 6 分

可得 $M\left(\frac{-x_1}{y_1-1},0\right)$，$N\left(\frac{-x_2}{y_2-1},0\right)$，………………………………………………… 7 分

以 MN 为直径的圆方程为，$\left(x+\frac{x_1}{y_1-1}\right)\left(x+\frac{x_2}{y_2-1}\right)+y^2=0$，

即 $x^2+y^2+\left(\frac{x_1}{y_1-1}+\frac{x_2}{y_2-1}\right)x+\frac{x_1x_2}{(y_1-1)(y_2-1)}=0$. ① ……………………… 8 分

因为 $\frac{x_1x_2}{(y_1-1)(y_2-1)}=\frac{x_1x_2}{\left(kx_1-\frac{1}{2}\right)\left(kx_2-\frac{1}{2}\right)}=\frac{4x_1x_2}{4k^2x_1x_2-2k(x_1+x_2)+1}$

$=\frac{-12}{-12k^2+8k^2+4k^2+2}=-6$. ………………………………………………………… 10 分

所以在①中令 $x=0$，得 $y^2=6$，即以 MN 为直径的圆过 y 轴上的定点 $(0,\pm\sqrt{6})$. …
…………………………………………………………………………………… 12 分

22. 解答：(1) $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}=\frac{x-2}{x^2}$， ………………………………………………… 1 分

那么 $f'(x)=0$，$x=2$，所以 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 单调递减，$(2,+\infty)$ 单调递增. ……… 2 分

因为 $f(1)=0$，$f(2)=\ln 2-1<0$，$f(e^2)=2+\frac{2}{e^2}-2>0$，

结合单调性，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 有且仅有一个零点. ……………………………………… 3 分

(2) 令 $g(x)=0$，即 $x\ln x-ax^2-x+1=0$，从而有 $ax=\ln x-1+\frac{1}{x}$. ………… 4 分

令 $\varphi(x)=\ln x-1+\frac{1}{x}$，从而 $g(x)$ 的零点个数等价于 $y=ax$ 与 $\varphi(x)$ 图像的交点个数.

$\varphi'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$，令 $\varphi'(x)=0$，得 $x=1$.

所以 $\varphi(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减，$(1,+\infty)$ 单调递增，且 $\varphi_{\min}(x)=\varphi(1)=0$. ………… 5 分

当 $a=0$ 时，$y=ax$ 图像与 $\varphi(x)$ 图像有一个交点. ………………………………………… 6 分

当 $a<0$ 时，$y=ax$ 图像经过二、四象限，与 $\varphi(x)$ 图像无交点. ……………………… 7 分

当 $a>0$ 时，$y=ax$ 图像经过一、三象限，与 $\varphi(x)$ 图像至少有一个交点. 当 $y=ax$ 图像与 $\varphi(x)$ 图像相切时，设切点横坐标为 x_0，则有 $\begin{cases} a=\varphi(x_0)=\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x_0^2} \\ ax_0=\ln x_0-1+\frac{1}{x_0} \end{cases}$，

即有 $\ln x_0+\frac{2}{x_0}-2=0$，从而 $x_0=\lambda$， ………………………………………………… 8 分

此时 $a=\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{\lambda-1}{\lambda^2}>0$.

所以，当时 $a=\frac{\lambda-1}{\lambda^2}$ 时，$y=ax$ 图像与 $\varphi(x)$ 图像有两个交点；…………………… 9 分

当 $0<a<\frac{\lambda-1}{\lambda^2}$ 时，$y=ax$ 图像与 $\varphi(x)$ 图像有三个交点； ……………………… 10 分

当 $a>\frac{\lambda-1}{\lambda^2}$ 时，$y=ax$ 图像与图像 $\varphi(x)$ 有一个交点. …………………………… 11 分

综上所述，当 $a<0$ 时，$g(x)$ 没有零点；当 $0<a<\frac{\lambda-1}{\lambda^2}$ 时，$g(x)$ 有三个零点；当 $a=\frac{\lambda-1}{\lambda^2}$，$g(x)$ 有两个零点；当 $a>\frac{\lambda-1}{\lambda^2}$ 或 $a=0$ 时，$g(x)$ 有一个零点. …………… 12 分